Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS ASSURANCE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Démarrage d'un train à très haute vitesse (13 questions) **Page 3**

2. Obsolescence programmée des smartphones (13 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsassurance.fr/assets/annales/bts-assurance/E2 - Mathématiques/2018/BTS Assurance - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Démarrage d’un train à très haute vitesse

Un projet de train à propulsion électromagnétique vise une vitesse de 400 km/h en moins de deux minutes, et sa distance parcourue est modélisée par une fonction. Les questions étudient cette fonction par une équation différentielle, ses variations et ses applications, puis calculent l’aire d’une pièce dessinée pour une future gare.

A. Résolution d’une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l’équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0, en utilisant la formule fournie.

L’équation homogène s’écrit $y' - 0,2y = 0$. Dans la formule fournie $y' + ay = 0$, on prend donc $a = -0,2$. Les solutions sur $[0, +\infty[$ sont alors les fonctions exponentielles de la forme $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Le signe négatif de la formule transforme ici $-a$ en $0,2$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie sur [0, 3] par g(t) = -15t - 75 est une solution de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

On dérive d’abord $g(t) = -15t - 75$, ce qui donne $g'(t) = -15$. En substituant g dans le membre de gauche de l’équation différentielle :

$g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = -15 + 3t + 15 = 3t$.

On retrouve bien le second membre. Ainsi, g vérifie l’équation sur son intervalle de définition $[0, 3]$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $g'(t) - 0,2g(t) = 3t$: g est une solution de (E).

Question 3°. Déduire de la solution particulière et de l’équation homogène l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

La différence entre deux solutions de l’équation avec second membre est une solution de l’équation homogène. On ajoute donc la solution particulière $g(t) = -15t - 75$ à la solution générale trouvée à la question 1, soit $ke^{0,2t}$. Cette méthode fournit toutes les solutions sur l’intervalle considéré, sans autre condition initiale à appliquer.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Déterminer la fonction f solution de l’équation différentielle qui vérifie la condition initiale f(0) = 0, le wagon étant au point de départ à l’instant t = 0.

On impose la condition initiale à la solution générale : $f(0) = ke^0 - 15 \times 0 - 75 = k - 75$. Comme $f(0) = 0$, on obtient $k = 75$. On remplace alors la constante dans l’expression générale. La forme obtenue coïncide avec celle donnée dans la partie B, ce qui confirme la fonction distance à étudier.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(t) = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir des expressions fournies par le logiciel de calcul formel, résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

Le calcul formel donne $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Résoudre $f'(t) \geq 0$ revient à résoudre $15(e^{0,2t} - 1) \geq 0$. Comme 15 est positif, cela équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$, soit $t \geq 0$. Toute la plage demandée, $[0, 3]$, satisfait donc l'inéquation, avec égalité uniquement à son origine.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$, avec égalité en $t = 0$.

Question 1° b). Déduire de l'étude du signe de f' les variations de f sur l'intervalle [0, 3].

Sur $[0, 3]$, la dérivée est positive ou nulle et n'est strictement positive que pour $t > 0$. La fonction f est donc croissante sur l'intervalle, et strictement croissante après l'instant initial. Le tableau résume son sens de variation :

t	**0**	**3**
Variation de f	↗	

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est croissante sur $[0, 3]$.

Question 2°. Calculer la distance parcourue par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième de kilomètre.

La distance parcourue au bout d'une minute est la valeur de la fonction en $t = 1$. On remplace donc t par 1 dans son expression :

$f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15 \approx 1,6052$ km.

À la précision demandée, on arrondit au dixième de kilomètre. Il s'agit bien d'une distance, et non d'une vitesse instantanée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(1) \approx 1,6$ km.

Question 3° a). En utilisant le lien entre la vitesse et f'(t), déterminer la vitesse du wagon à t = 2 minutes, en kilomètres par minute, et arrondir au dixième.

La vitesse instantanée est donnée par $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$, en kilomètres par minute. À deux minutes :

$f'(2) = 15e^{0,4} - 15 \approx 7,3774$ km/min.

En arrondissant au dixième, on obtient la vitesse demandée. L'unité est le kilomètre par minute, comme l'indique la définition de la vitesse dans l'énoncé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(2) \approx 7,4$ km/min.

Question 3° b). Déterminer si l'objectif des ingénieurs est atteint, en justifiant la réponse à partir de la vitesse obtenue à deux minutes et de l'objectif fixé.

Le seuil visé, exprimé en kilomètres par minute, vaut $400/60 \approx 6,67$ km/min. À deux minutes, la vitesse est $7,377$ km/min, soit environ $442,6$ km/h. De plus, $f'(t) = 15(e^{0,2t} - 1)$ est croissante sur $[0, 3]$. La vitesse atteint donc ce seuil avant deux minutes, et pas seulement à cet instant.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : le seuil de 400 km/h est dépassé avant deux minutes.

Question 4°. Choisir, parmi les trois propositions, l'équation de la tangente à la courbe C de f au point d'abscisse 2. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Au point d'abscisse 2, la pente de la tangente est $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1)$. La formule de tangente donne $y = f'(2)(t - 2) + f(2)$. En développant et en remplaçant $f(2) = 75(e^{0,4} - 1) - 30$, on obtient la troisième proposition. Les deux autres ne donnent pas le bon terme constant.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$.

C. Calcul intégral

Question 1°. Choisir parmi les trois propositions l'aire A1 du rectangle OPQR, en unités d'aire. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Sur le schéma, le rectangle $OPQR$ s'étend de $x = 0$ à $x = 3$, donc sa largeur est 3. Sa hauteur est celle du bord supérieur, donné par $y = 2,25$. L'aire d'un rectangle est le produit de ses dimensions : $A_1 = 3 \times 2,25 = 6,75$ unités d'aire. Parmi les réponses proposées, il faut retenir cette valeur.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_1 = 6,75$ u. a.

Question 2°. À l'aide de la primitive fournie, calculer l'aire A2 de la partie du plan limitée par la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 3.

La fonction g est positive sur $[0, 3]$, donc l'aire demandée est l'intégrale de g entre 0 et 3. Avec la primitive fournie, on calcule :

$A_2 = \left[\frac{27}{4}\ln(x^2 + 9)\right]_0^3 = \frac{27}{4}(\ln 18 - \ln 9) = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire A de la pièce hachurée, en tenant compte de sa symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, puis arrondir au millième.

Sur la moitié droite, la zone hachurée est comprise entre le rectangle de hauteur 2,25 et la courbe de g. Son aire vaut donc $A_1 - A_2$. La pièce étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on double cette aire :

$A = 2\left(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2\right) \approx 4,143$ u. a.

L'arrondi est donné au millième, conformément à l'énoncé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A \approx 4,143$ u. a.

2. Obsolescence programmée des smartphones

L'exercice étudie l'obsolescence technique et logicielle de smartphones, puis la réparabilité d'un lot prélevé dans un stock de modèle A. Il se termine par un test bilatéral visant à examiner, à partir d'un échantillon, l'affirmation selon laquelle 55 % des Français pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des pourcentages fournis et de la population de 200 smartphones, recopier et compléter le tableau d'effectifs croisant l'obsolescence technique et l'obsolescence logicielle, avec les totaux.

Sur 200 smartphones, 3 % représentent 6 appareils touchés par l'obsolescence technique, et 8 % représentent 16 appareils touchés par l'obsolescence logicielle. Parmi ces 16, 12,5 % sont aussi touchés techniquement, soit 2. Les autres effectifs se déduisent des totaux : 4 touchés seulement techniquement, 14 seulement logiciellement et 180 par aucun des deux types.

Smartphones	Touchés par l'obsolescence logicielle	Non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
Touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
Non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

Tableau d'effectifs complété

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs : 2, 4, 14 et 180 ; totaux : 6, 194, 16, 184 et 200.

Question 2°. Pour un smartphone choisi au hasard, donner P(T), P(L) et P_L(T), où T désigne l'obsolescence technique et L l'obsolescence logicielle.

Les proportions de l'énoncé donnent directement les probabilités demandées. L'événement T concerne 3 % des smartphones et l'événement L en concerne 8 %. La troisième probabilité est conditionnelle : elle porte uniquement sur les smartphones déjà touchés par l'obsolescence logicielle. Parmi ceux-ci, 12,5 % sont aussi touchés techniquement. On exprime ces proportions sous forme décimale pour obtenir les probabilités.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0{,}03$; $P(L) = 0{,}08$; $P_L(T) = 0{,}125$.

Question 3° a). À l'aide des résultats précédents, calculer la probabilité que le smartphone soit touché à la fois par l'obsolescence technique et par l'obsolescence logicielle, soit P(T ∩ L).

La probabilité que les deux événements se réalisent se calcule à partir de la probabilité de L et de la probabilité conditionnelle de T sachant L. Ainsi, on multiplie la proportion de smartphones touchés logiciellement par la proportion de ceux-ci qui sont également touchés techniquement. Le résultat, 0,01, correspond à 1 % de l'ensemble des smartphones. Le tableau d'effectifs le confirme : 2 appareils sur 200.

$P(T \cap L) = P(L)P_L(T) = 0,08 \times 0,125 = 0,01.$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(T ∩ L) = 0,01.

Question 3° b). À l'aide des résultats précédents, calculer la probabilité que le smartphone soit touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence, soit P(T ∪ L).

« Au moins l'un des deux types » désigne l'union des événements T et L. En additionnant leurs probabilités, l'intersection est comptée deux fois : il faut donc la soustraire une fois. Avec les résultats précédents, on obtient $P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L) = 0,03 + 0,08 - 0,01 = 0,10$. La probabilité recherchée vaut donc 10 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(T ∪ L) = 0,10.

Question 3° c). À l'aide des résultats précédents, calculer P_T(L), la probabilité d'obsolescence logicielle sachant que le smartphone est touché par l'obsolescence technique.

On cherche la probabilité de L sachant que T est réalisé. La probabilité conditionnelle se calcule en divisant la probabilité de l'intersection par celle de T. On obtient $P_T(L) = \frac{P(T \cap L)}{P(T)} = \frac{0,01}{0,03} = \frac{1}{3}$. Au millième, cette probabilité vaut 0,333. Autrement dit, environ un tiers des smartphones touchés techniquement le sont aussi logiciellement.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(L) \approx 0,333$, soit 33,3 %.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte les smartphones non réparables parmi 50 smartphones prélevés, suit une loi binomiale, puis déterminer ses paramètres.

Un prélèvement constitue une épreuve de Bernoulli : le smartphone est non réparable avec la probabilité 0,045, ou réparable avec la probabilité complémentaire. Le stock étant suffisamment important, le prélèvement est assimilé à des tirages avec remise. Les 50 épreuves sont donc indépendantes et leur probabilité reste constante. La variable X compte le nombre de smartphones non réparables dans ces 50 épreuves : elle suit une loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,045.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50; 0,045)$.

Question 2°. Calculer la probabilité que les 50 smartphones du lot soient tous réparables.

Le lot est entièrement réparable si aucun smartphone n'est non réparable, donc si X = 0. Pour un tirage, la probabilité d'obtenir un appareil réparable est $1 - 0,045 = 0,955$. Les 50 tirages étant assimilés à des tirages avec remise, ils sont indépendants. La probabilité que tous les appareils du lot soient réparables vaut donc $P(X = 0) = 0,955^{50}$, soit environ 0,100 au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(X = 0) = $0,955^{50}$ ≈ 0,100.

Question 3° a). Faire tourner à la main l'algorithme et compléter le tableau avec les valeurs de P(X = i) pour i = 0, 1, 2 et 3, ainsi que les valeurs successives de la somme S.

Pour chaque i, la probabilité se calcule par $P(X = i) = \binom{50}{i}(0,045)^i(0,955)^{50-i}$. À chaque passage dans la boucle, l'algorithme ajoute cette probabilité à la valeur précédente de S. Les valeurs du tableau sont arrondies au millième ; pour S, on cumule les probabilités successives.

i	0	1	2	3
P(X = i)	0,100	0,236	0,272	0,205
S après ajout	0,100	0,336	0,608	0,813

Tableau de la loi binomiale complété

i	0	1	2	3
$P(X = i)$	0,1	0,236	0,272	0,205
S	0,1	0,336	0,608	0,813

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(X = i) : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. S : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter cette valeur dans le contexte du lot de smartphones.

À la fin de la boucle, les termes ajoutés correspondent aux probabilités de X = 0, 1, 2 et 3. La somme vaut donc $S = P(X \leq 3) \approx 0,813$. Dans le contexte, cette valeur signifie qu'environ 81,3 % des lots de 50 smartphones contiennent au plus 3 appareils non réparables. Elle ne désigne pas la probabilité d'obtenir exactement 3 appareils non réparables.

✓ RÉPONSE À RETENIR

S ≈ 0,813 : environ 81,3 % des lots ont au plus 3 smartphones non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte du nombre de smartphones non réparables dans un lot de 50.

Pour une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p, l'espérance est $E(X) = np$. Ici, $E(X) = 50 \times 0,045 = 2,25$. Cette valeur décrit le nombre moyen de smartphones non réparables par lot si l'on considère un grand nombre de lots de 50 appareils. Elle n'impose pas qu'un lot particulier contienne 2,25 appareils, puisque le nombre observé est entier.

✓ RÉPONSE À RETENIR

E(X) = 2,25 : en moyenne, 2,25 smartphones non réparables par lot.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Sous l'hypothèse nulle H0, choisir parmi les trois propositions la valeur de h, arrondie au centième, telle que la fréquence F appartienne à l'intervalle [0,55 - h ; 0,55 + h] avec une probabilité de 0,95.

Sous l'hypothèse nulle, F suit une loi normale de moyenne 0,55 et d'écart type 0,037. L'intervalle centré contenant 95 % des valeurs correspond à environ 1,96 écarts types de part et d'autre de la moyenne. Ainsi, $h \approx 1,96 \times 0,037 = 0,07252$. Arrondi au centième, h vaut 0,07, ce qui correspond à la troisième proposition.

✓ RÉPONSE À RETENIR

h ≈ 0,07.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %.

Le test est bilatéral au seuil de 5 % : sous H_0, l'intervalle de fluctuation à 95 % est centré sur 0,55 et sa demi-largeur arrondie est 0,07. On compare la fréquence observée à cet intervalle.

- Si elle appartient à [0,48 ; 0,62], on ne rejette pas H_0.
- Si elle est extérieure à cet intervalle, on rejette H_0 au profit de H_1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Ne pas rejeter H_0 si la fréquence est dans [0,48 ; 0,62] ; la rejeter sinon.

Question 3°. Pour l'échantillon de 180 personnes dont 76 déclarent que la marque B pratique l'obsolescence programmée, déterminer la conclusion du test.

La fréquence observée est $f = 76/180 \approx 0,422$. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de l'intervalle de fluctuation retenu sous H_0. Elle se situe donc dans la zone de rejet du test bilatéral au seuil de 5 %. On rejette H_0 : l'échantillon ne permet pas de retenir l'affirmation selon laquelle 55 % des Français pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

76/180 ≈ 0,422, hors de [0,48 ; 0,62] : on rejette H_0.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2018, porte le code MATGRB1 et dure deux heures. Son coefficient dépend de la spécialité, de 1 à 3. L'exercice 1 mobilise les mathématiques autour d'un train à très haute vitesse et de l'aménagement d'une gare. L'exercice 2 évalue les probabilités, les lois binomiales et les tests d'hypothèse dans le contexte des smartphones.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' - ay = b(t), les solutions s'obtiennent en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène.
- Le signe de f' détermine les variations de f, et f'(a) est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.
- Pour une variable binomiale X de paramètres n et p, l'espérance est E(X) = np.
- Pour un test bilatéral, on compare la fréquence observée à l'intervalle de fluctuation associé à l'hypothèse nulle.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les domaines et intervalles demandés lors de la résolution des équations et inéquations.
- Vérifier les unités avant d'interpréter distance et vitesse, notamment la conversion entre km/min et km/h.
- Distinguer P(T sachant L) de P(L sachant T) et utiliser correctement les probabilités conditionnelles.
- Dans le test, comparer la fréquence observée à l'intervalle établi sous H0, puis formuler clairement la conclusion.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer les solutions d'une équation différentielle avec un second membre ?
On résout d'abord l'équation homogène associée, puis on ajoute une solution particulière de l'équation complète. La condition initiale permet ensuite de fixer la constante et d'identifier la solution recherchée.

Q : Comment calculer l'aire de la pièce à partir de la figure et de la fonction g ?
On calcule d'abord l'aire sous la courbe de g entre 0 et 3 à l'aide de sa primitive. On la soustrait à l'aire du rectangle pour obtenir l'aire de la moitié droite, puis on exploite la symétrie.

Q : Comment organiser son temps dans cette épreuve de deux heures ?
Le sujet comporte deux exercices de 10 points, chacun divisé en parties indépendantes. Repérez les questions accessibles, répartissez le temps entre les deux exercices et gardez quelques minutes pour vérifier les arrondis et les unités.

Q : Que faut-il faire pour conclure correctement le test d'hypothèse ?
Il faut appliquer la règle de décision au seuil de 5 % en comparant la fréquence observée à l'intervalle défini sous H0. La conclusion précise si les données conduisent à rejeter cette hypothèse.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsassurance.fr/assets/annales/bts-assurance/E2 - Mathématiques/2018/BTS Assurance - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Assurance : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.