Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS ASSURANCE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle des tubes fluorescents et conformité des rivets (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsassurance.fr/assets/annales/bts-assurance/E2 - Mathématiques/2022/BTS Assurance - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot se déplace à 20 m·s⁻¹ au début du freinage et sa vitesse est modélisée par une fonction définie sur [0 ; +∞[. Les questions portent sur une équation différentielle, l'étude de cette fonction, la distance parcourue, son développement limité et la tangente en zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle (E₀) : y' + 0,8y = 0.

La formule du sujet donne, pour $y' + 0,8y = 0$, les solutions $y(t) = ke^{-0,8t}$, où k est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

1. La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc $g'(t) = 0$.
2. Ainsi, $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$ pour tout $t \geq 0$. Elle vérifie bien (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1. c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

Les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant la solution particulière $g(t) = 5$ aux solutions de l'équation homogène associée (E_0), soit $ke^{-0,8t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

1. La solution générale est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$.
2. La condition $f(0) = 20$ donne $5 + k = 20$, donc $k = 15$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Pour f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ vaut 5.

Comme $-0,8t \to -\infty$ lorsque $t \to +\infty$, on a $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 \to 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

> Si $f(t) \to L$ lorsque $t \to +\infty$, alors sa courbe admet l'asymptote horizontale $y = L$.

Ici, la limite vaut 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale en $+\infty$: $y = 5$.

Question 2. En utilisant l'expression admise f'(t) = −12e$^{-0,8t}$, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante, de $f(0) = 20$ vers sa limite 5.

t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow 5$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

La vitesse s'écrit $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Pour tout instant fini, l'exponentielle est positive et donc $f(t) > 5$.

- La vitesse ne devient jamais nulle.
- Elle tend vers $5\ \mathrm{m\backslash cdot p s^{-1}}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non, le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Question 4. a. **La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = −18,75e^{−0,8t} + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.**

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$: $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. Ainsi, F est une primitive de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4. b. **La distance d parcourue entre les instants t_0 et t_1 est donnée par $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

1. Par le théorème fondamental, $d = F(1) - F(0)$.
2. Donc $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$.
3. Cette distance vaut environ $15,3251$ m, soit $15,33$ m au centimètre près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$ au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Parmi les propositions, recopier l'unique développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro qui est exact. Aucune justification n'est demandée.**

Le développement limité affiché donne la partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 = 20 - 12t + 4,8t^2$. La proposition exacte est celle qui ajoute un reste $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Troisième proposition : $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. **Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.**

> La tangente en $t = 0$ a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$.

On a $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente est donc de pente -12 et passe par le point $(0; 20)$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$y = 20 - 12t.$

2. Contrôle des tubes fluorescents et conformité des rivets

Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers et contrôle leur défaut éventuel. L'exercice étudie aussi la durée de bon fonctionnement de ces tubes par une loi exponentielle et estime la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon.

Partie A - Probabilités conditionnelles

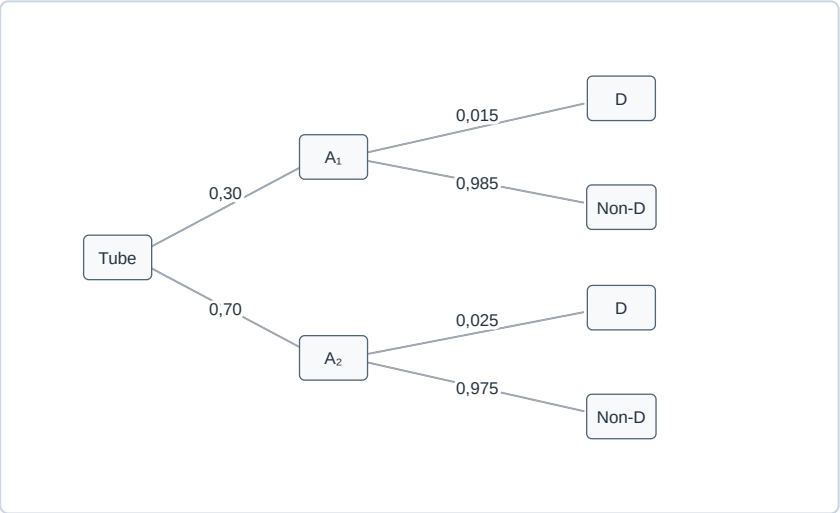
Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation, à partir des proportions de production des deux ateliers et de leurs taux de tubes défectueux.

Le premier niveau indique l'atelier d'origine. Les branches suivantes distinguent les tubes défectueux et ceux sans défaut. Pour chaque atelier, la probabilité de ne pas avoir de défaut est le complément du taux de défaut :

- Atelier 1 : défaut 0,015 ; sans défaut 0,985.
- Atelier 2 : défaut 0,025 ; sans défaut 0,975.

Les proportions de production sont 0,30 pour l'atelier 1 et 0,70 pour l'atelier 2.

Arbre pondéré des ateliers et défauts



Les probabilités issues de chaque nœud totalisent 1.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Arbre : A_1 (0,30), A_2 (0,70) ; depuis A_1 : D (0,015), non-D (0,985) ; depuis A_2 : D (0,025), non-D (0,975).

Question 2. Calculer la probabilité $P(A_1 \cap D)$, où A_1 désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

La probabilité recherchée correspond au chemin où le tube provient de l'atelier 1 et présente un défaut. On multiplie donc la proportion de tubes issus de cet atelier par le taux de défaut parmi ses tubes :

$$P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 %.

Question 3. Montrer que P(D) = 0,022, conformément à la correction manuscrite visible sur le sujet.

Un tube défectueux peut provenir de l'un ou l'autre atelier. Les deux chemins menant à l'événement D sont incompatibles : leurs probabilités s'additionnent. Ainsi, la contribution de l'atelier 1 est $0,30 \times 0,015 = 0,0045$, et celle de l'atelier 2 est $0,70 \times 0,025 = 0,0175$. On obtient bien la valeur indiquée sur le sujet.

$P(D) = 0,0045 + 0,0175 = 0,022$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(D) = 0,022$, soit 2,2 %.

Question 4. Sachant que le tube choisi ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

On cherche la probabilité que le tube provienne de l'atelier 2 sachant qu'il n'a pas de défaut. Dans l'atelier 2, la probabilité d'absence de défaut est $0,975$, donc $P(A_2 \cap \overline{D}) = 0,70 \times 0,975 = 0,6825$. La probabilité d'absence de défaut dans toute l'usine vaut $1 - 0,022 = 0,978$.

On divise la probabilité de l'intersection par celle de l'événement conditionnant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{0,6825}{0,978} \approx 0,698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. La durée T de bon fonctionnement d'un tube suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.

Pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,001$, l'espérance est l'inverse du paramètre. Le calcul donne :

$E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,001} = 1\,000$ heures.

En moyenne, un tube fonctionne donc 1 000 heures avant de présenter une défaillance. Cette valeur est une moyenne sur la production, et non une durée garantie pour chaque tube.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(T) = 1\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. Calculer, avec un arrondi à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement du tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.

La formule fournie est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Avec $\lambda = 0,001$ et $t = 8\,000$, on obtient :

$P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0,001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0,9997.$

Comme la loi exponentielle est continue, les événements $T < 8\,000$ et $T \leq 8\,000$ ont la même probabilité. L'arrondi demandé au centième est donc 1,00.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 8\,000) \approx 1,00.$

Question 3. Calculer, avec un arrondi à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement du tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

La probabilité que la durée dépasse 10 000 heures est le complément de la probabilité que le tube fonctionne au plus 10 000 heures. Avec la fonction de répartition de la loi exponentielle :

$P(T > 10\,000) = e^{-\lambda \times 10\,000} = e^{-0,001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0,0000454.$

Arrondie au centième, cette probabilité est égale à 0,00.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0,00$ au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Parmi 1 000 rivets prélevés, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence de rivets conformes observée dans l'échantillon. On rapporte le nombre de rivets conformes au nombre total prélevé :

$f = \dfrac{975}{1\,000} = 0,975.$

La proportion estimée de rivets conformes dans l'ensemble de la production est donc 0,975, soit 97,5 %.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Estimation ponctuelle : $f = 0,975$, soit 97,5 %.

Question 2. À partir de la fréquence observée f, déterminer un intervalle de confiance centré sur f pour la proportion p au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.

On utilise la formule donnée avec la fréquence observée $f = 0,975$ et la taille d'échantillon $n = 1\,000$. La marge d'erreur vaut $1,96\sqrt{\dfrac{0,975(1-0,975)}{1\,000}} \approx 0,009677$. Les bornes avant arrondi sont donc environ 0,965323 et 0,984677.

Borne	**Valeur arrondie à 10^{-3}**
Inférieure	0,965
Supérieure	0,985

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, d'une durée de 2 heures et de coefficient 2, sauf Traitement des matériaux : 3. Le sujet porte sur le freinage d'un chariot, le contrôle de tubes fluorescents et la conformité de rivets. Il évalue équations différentielles, fonctions, intégrales, développements limités, probabilités, loi exponentielle et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$; ajouter une solution particulière donne les solutions de l'équation avec second membre.
- Pour $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, la limite en $+\infty$ vaut 5 et la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation $y = 5$.
- Pour T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- L'intervalle de confiance à 95 % fourni est $[f - 1,96\sqrt{(f(1-f)/n)} ; f + 1,96\sqrt{(f(1-f)/n)}]$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Dans l'arbre, distinguer les proportions de production des probabilités conditionnelles de défaut propres à chaque atelier.
- Pour une probabilité conditionnelle, identifier l'événement sachant lequel on se place et utiliser la probabilité de cet événement au dénominateur.
- Pour étudier f, relier le signe de la dérivée aux variations et interpréter la limite en tenant compte de la vitesse du chariot.
- Respecter les arrondis demandés : au centimètre pour la distance, au centième pour les probabilités et au millième pour l'intervalle.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer une probabilité conjointe à partir de l'arbre des ateliers ?

Pour obtenir la probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 1 et soit défectueux, multipliez la probabilité qu'il provienne de cet atelier par la probabilité conditionnelle d'un défaut dans cet atelier. Sur l'arbre, cela correspond au produit des probabilités d'une branche complète.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un tube fonctionne plus longtemps qu'une durée donnée ?

Pour une durée T de loi exponentielle de paramètre λ, utilisez $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Cette formule est le complément de $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Vérifiez que la durée t est exprimée en heures, comme le paramètre du sujet.

Q : Comment répartir le temps et les points dans cette épreuve ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points, soit 20 points au total. Les trois parties de chaque exercice peuvent être traitées indépendamment. Avancez régulièrement et passez à une autre partie si une question bloque.

Q : Quels critères de présentation et quels arrondis faut-il respecter ?

Le sujet demande une distance arrondie au centimètre, des probabilités de durée arrondies à 10^{-2} et des bornes d'intervalle arrondies à 10^{-3}. Présentez les calculs clairement et indiquez les unités lorsqu'elles sont pertinentes.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsassurance.fr/assets/annales/bts-assurance/E2 - Mathématiques/2022/BTS Assurance - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Assurance : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.