Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS ASSURANCE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot en freinage (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace d'un signal électrique d'entrée-sortie (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsassurance.fr/assets/annales/bts-assurance/E2 - Mathématiques/2022/BTS Assurance - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot en freinage

Un chariot de fête foraine, lancé initialement à 20 m·s⁻¹, est ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est étudiée au moyen d'une équation différentielle, puis de variations, d'un calcul de distance parcourue, d'un développement limité et de la tangente en zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre sur l'intervalle considéré l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0, en utilisant la formule fournie.

La formule fournie s'applique à une équation de la forme $y' + ay = 0$. Ici, le coefficient est $a = 0,8$. Les solutions sont donc des fonctions exponentielles décroissantes, multipliées par une constante réelle arbitraire k. Cette expression est définie et dérivable sur tout l'intervalle $[0; +\infty[$, comme demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction g définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5 est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Pour vérifier que g est solution, on calcule sa dérivée et on la remplace dans le membre de gauche de l'équation. Puisque $g(t) = 5$ est constante, sa dérivée est nulle. Le membre de gauche vaut alors $0 + 0,8 \times 5 = 4$, ce qui correspond au membre de droite. L'égalité est vérifiée pour tout $t \geq 0$.

La fonction proposée est bien une solution particulière de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1.c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

On connaît une solution particulière de (E), à savoir $g(t) = 5$. Toute solution de l'équation complète s'obtient en ajoutant à cette solution une solution de l'équation homogène associée, dont la forme est $ke^{-0,8t}$. La constante k peut prendre toute valeur réelle, car aucune condition initiale n'est imposée à cette question.

On obtient ainsi l'ensemble de toutes les solutions sur l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

D'après la question précédente, la solution cherchée s'écrit $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. On utilise la condition initiale en prenant $t = 0$. Comme $e^0 = 1$, on obtient $5 + k = 20$, donc $k = 15$. La condition initiale fixe ainsi l'unique constante de la solution recherchée.

En remplaçant k par sa valeur, on obtient l'expression de la vitesse.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t), lorsque t tend vers +∞, vaut 5.

On utilise l'expression $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers zéro. Le terme $15e^{-0,8t}$ tend également vers zéro. Il ne reste alors que le terme constant de l'expression de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 5. Par définition, la courbe représentative d'une fonction qui admet une limite finie en $+\infty$ possède une asymptote horizontale à cette valeur. Ici, l'asymptote est donc la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par l'ordonnée 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À l'aide de l'expression donnée pour f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, la dérivée donnée est toujours négative et la fonction est strictement décroissante. Elle vaut 20 en zéro et tend vers 5 lorsque t tend vers $+\infty$.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 5 sur $[0;+\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour tout instant fini $t \geq 0$, le terme exponentiel est strictement positif. Comme son coefficient est positif, on a donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse ne peut jamais être nulle. Elle diminue et se rapproche de $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, mais ne l'atteint pas.

Le freinage ne conduit donc pas à l'arrêt dans ce modèle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ sans jamais s'annuler.

Question 4.a. Pour F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t, vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. La dérivée de l'exponentielle composée est $-0,8e^{-0,8t}$, donc $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est précisément celle de $f(t)$.

Ainsi, F est bien une primitive de f sur l'intervalle demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4.b. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance parcourue entre 0 et 1 est l'intégrale de la vitesse, donc $d = F(1) - F(0)$. En remplaçant les bornes dans la primitive, on obtient $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. Cette valeur est exprimée en mètres.

À l'arrondi au centimètre, la distance vaut $15,33$ m.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir la proposition correspondant au développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte, et aucune justification n'est demandée.

Le logiciel affiche la partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste doit être de la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers zéro. Parmi les propositions, c'est donc celle qui contient ce reste qui convient.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente au point d'abscisse zéro passe par $(0; f(0)) = (0; 20)$. Son coefficient directeur est $f'(0) = -12e^0 = -12$. Avec la formule d'une droite de pente m passant par $(0; 20)$, on obtient $y = mt + 20$. Il suffit d'y remplacer m par -12.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace d’un signal électrique d’entrée-sortie

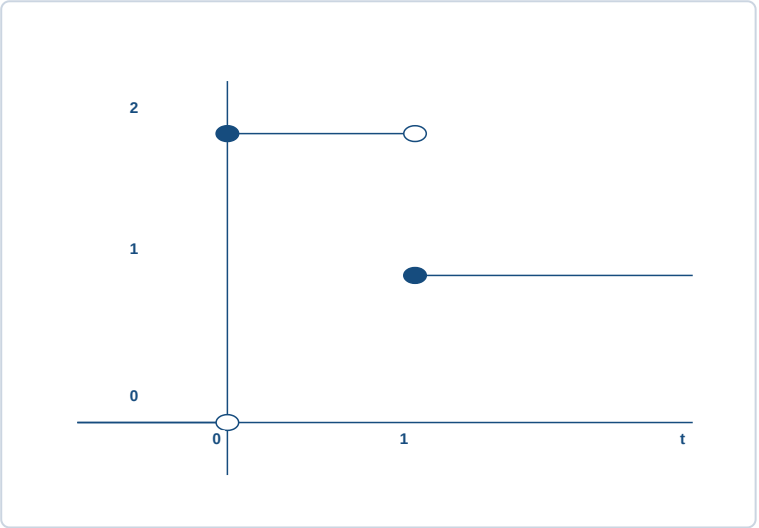
Un système électrique reçoit le signal causal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et produit un signal de sortie s(t). L’exercice étudie les transformées de Laplace des signaux, la fonction de transfert, le retard temporel et les représentations graphiques de l’entrée et de la sortie.

Partie A - Signal d’entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

La définition de l’échelon donne $U(t) = 0$ avant 0 et $U(t) = 1$ à partir de 0. Ainsi, $e(t) = 0$ pour $t < 0$, puis $e(t) = 2$ pour $0 \leq t < 1$. À partir de $t = 1$, les deux échelons valent 1, donc $e(t) = 1$. Le point d’abscisse 1 appartient donc au palier de hauteur 1.

Signal d’entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

Le signal vaut 0 avant 0, 2 de 0 inclus à 1 exclu, puis 1 à partir de 1 inclus.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d’entrée.

Par linéarité, la transformée de $2U(t)$ est $2/p$. Le formulaire donne pour l’échelon retardé $U(t-1)$ la transformée e^{-p}/p. En soustrayant ces deux transformées, on obtient celle du signal d’entrée. Le retard de durée 1 produit bien le facteur exponentiel e^{-p}.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La transformée de Laplace du signal d’entrée est $E(p) = \dfrac{2 - e^{-p}}{p}$.

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/(p(p + 1))]e⁻ᵖ.

La fonction de transfert vérifie $S(p) = H(p)E(p)$. Avec $H(p) = 1/(p+1)$ et le résultat de la partie A, $E(p) = (2 - e^{-p})/p$, on multiplie les deux expressions. En séparant les deux termes du numérateur, on retrouve l'expression demandée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> On obtient $S(p) = \dfrac{2}{p(p+1)} - \dfrac{e^{-p}}{p(p+1)}$.

Question 2. Vérifier l'égalité 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

Mettons le membre de droite au dénominateur commun $p(p+1)$. Le numérateur devient $(p+1) - p = 1$. On retrouve donc exactement le membre de gauche, ce qui vérifie l'égalité pour les valeurs de p où les expressions sont définies.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'égalité est vérifiée : $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$.

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de (1/p)e⁻ᵖ et de [1/(p + 1)]e⁻ᵖ.

Les deux premières inverses se lisent directement dans le formulaire. Pour les deux autres, on applique la propriété du retard : multiplier une transformée par e^{-p} revient à retarder le signal d'une unité et à le multiplier par $U(t-1)$. On donne ci-dessous les résultats dans l'ordre demandé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, puis $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

À l'aide de la décomposition précédente, $S(p) = 2(1/p - 1/(p+1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p+1))$. Sur $[0;1[$, le terme retardé est nul puisque $U(t-1) = 0$. Il reste donc l'inverse de $2(1/p - 1/(p+1))$, soit la différence de deux exponentielles.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0;1[$, le signal de sortie est $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e⁻ᵗ + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), en donnant la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.**

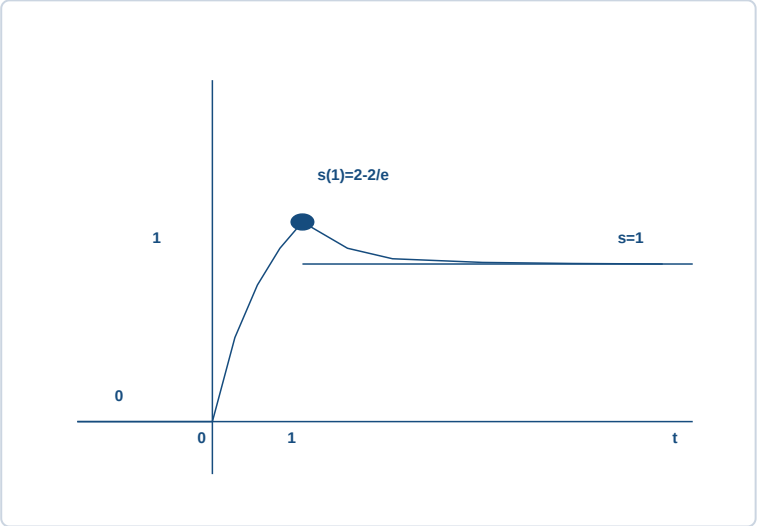
La formule admise sur $[1;+\infty[$ s'applique en $t=1$. Ainsi, $s(1)=(e-2)e^{-1}+1=(e-2)/e+1=2-2/e$. La valeur décimale est environ $1{,}264$, ce qui donne $1{,}3$ après arrondi au dixième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La valeur exacte est $s(1)=2-\dfrac{2}{e}$, soit environ $1{,}3$ au dixième.

Question 5.b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Le signal est nul pour $t<0$, puis suit $2(1-e^{-t})$ jusqu'à $t=1$. Il atteint alors $2-2/e$, soit environ $1{,}264$. Pour $t\geq 1$, il suit $1+(e-2)e^{-t}$, décroît et tend vers 1. La courbe est continue en $t=1$ et admet l'asymptote horizontale $s=1$.

Courbe du signal de sortie s(t)



> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Tracer la courbe de 0 à $(1;2-2/e)$, puis sa décroissance vers l'asymptote horizontale $s=1$.

Question 5.c. **Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.**

Pour $t\geq 1$, la formule donnée s'écrit $s(t)=1+(e-2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, e^{-t} tend vers 0. Le terme exponentiel tend donc vers 0, et le signal se rapproche de 1.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La limite du signal de sortie lorsque t tend vers $+\infty$ est 1.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques, et de 2 en Électrotechnique. Deux exercices portent sur le freinage d'un chariot et un système électrique, mobilisant équations différentielles, intégrales, développement limité et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, on peut chercher une solution particulière constante, puis ajouter les solutions de l'équation homogène.
- Pour $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, la limite en $+\infty$ vaut 5 et l'asymptote horizontale a pour équation y = 5.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : $d = \int_{[t_0,t_1]} f(t)dt$.
- En transformée de Laplace, un facteur e^{-ap} correspond à un retard de a et introduit un échelon U(t - a) dans le signal retardé.

Points de vigilance & attentes du jury

- Vérifier la solution particulière avant de déterminer la constante avec la condition initiale.
- Dans le tableau de variation, justifier le signe de la dérivée et indiquer les valeurs aux bornes ainsi que la limite.
- Pour la distance, calculer $F(t_1) - F(t_0)$, conserver les unités et effectuer l'arrondi demandé.
- Pour une transformée inverse avec retard, appliquer la propriété de décalage et conserver le facteur d'échelon correspondant.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment utiliser la condition initiale dans la résolution de l'équation différentielle ?

Écrivez d'abord la solution générale en ajoutant une solution particulière à la solution de l'équation homogène. Remplacez ensuite t par 0 et f(0) par 20 pour déterminer la constante.

Q : Comment reconnaître l'asymptote horizontale de la vitesse ?

Calculez la limite de f(t) lorsque t tend vers $+\infty$. Si cette limite est un réel L, la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L dans cette direction.

Q : Comment répartir le temps entre les deux exercices ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et l'épreuve dure 2 heures. Vous pouvez prévoir environ une heure par exercice, en gardant du temps pour vérifier les calculs, les unités et les tracés demandés.

Q : Le QCM sur le développement limité est-il pénalisé en cas d'erreur ?

Le sujet précise qu'une réponse fausse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent de point. Une seule proposition doit être recopiée et aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsassurance.fr/assets/annales/bts-assurance/E2 - Mathématiques/2022/BTS Assurance - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Assurance : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.