Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS ASSURANCE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRD1** • Durée : **Durée non indiquée dans cette édition**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Évolution de la température de l'eau d'un spa (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle qualité et commercialisation de farine par une minoterie (12 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtsassurance.fr/assets/annales/bts-assurance/E2 - Mathématiques/2023/BTS Assurance - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf

1. Évolution de la température de l'eau d'un spa

Après l'arrêt du chauffage, la température de l'eau d'un spa initialement à 38 °C est modélisée par une équation différentielle, avec une température ambiante constante de 25 °C. L'exercice étudie le modèle, ses variations et sa limite, puis utilise une alarme et un algorithme pour examiner des seuils de température.

Partie A

Question 1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle homogène y' + 0,05y = 0 sur l'intervalle [0 ; +∞[.

L'équation homogène se réécrit $y' = -0,05y$. C'est une équation différentielle du premier ordre à variables séparables : ses solutions sont des exponentielles dont le taux de décroissance est $0,05$. Sur l'intervalle demandé, la constante multiplicative peut être n'importe quel réel, y compris zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer une fonction constante solution particulière de l'équation différentielle y' + 0,05y = 1,25 sur [0 ; +∞[.

On cherche une solution constante $y(t) = c$. Sa dérivée est nulle, donc l'équation différentielle devient $0,05c = 1,25$. Ainsi, $c = 1,25/0,05 = 25$. La fonction constante de valeur 25 est bien une solution particulière sur $[0;+\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution particulière constante est $y(t) = 25$.

Question 3. En déduire les solutions de l'équation différentielle y' + 0,05y = 1,25.

Les solutions de l'équation avec second membre sont la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière. D'après les deux questions précédentes, on ajoute donc 25 à la fonction $Ce^{-0,05t}$. La constante C reste arbitraire avant d'appliquer la condition initiale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,05t} + 25$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4. En utilisant la condition f(0) = 38, montrer que, pour tout t de [0 ; +∞[, f(t) = 13e^(-0,05t) + 25.

La solution générale s'écrit $f(t) = Ce^{-0,05t} + 25$. En utilisant $f(0) = 38$ et $e^0 = 1$, on obtient $C + 25 = 38$, donc $C = 13$. En remplaçant cette constante dans l'expression générale, on établit la formule demandée pour tout $t \geq 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$.

Partie B

Question 1. Calculer f(24), arrondie au dixième, puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

On évalue le modèle au bout de 24 heures : $f(24) = 13e^{-0,05\times 24} + 25 \approx 28,9155$. L'arrondi au dixième est donc 28,9 °C. Cette valeur estime la température de l'eau après une journée sans chauffage, selon le modèle donné.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Après 24 h, la température de l'eau est d'environ **28,9 °C**.

Question 2. a). Déterminer une expression de f'(t) pour tout t de [0 ; +∞[.

La dérivée de $e^{-0,05t}$ est $-0,05e^{-0,05t}$, par dérivation d'une fonction composée. Le terme constant 25 a une dérivée nulle. En multipliant par le coefficient 13, on obtient l'expression de la dérivée de f, valable sur tout l'intervalle $[0;+\infty[$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -0,65e^{-0,05t}$.

Question 2. b). Déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[, puis expliquer si ce sens de variation est cohérent avec le contexte.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,05t}$ est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -0,65e^{-0,05t} < 0$, donc f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. C'est cohérent : après la coupure du chauffage, l'eau perd de la chaleur et refroidit.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement décroissante, conformément au refroidissement de l'eau.

Question 3. a). Déterminer la limite de f lorsque t tend vers +∞.

Quand t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,05t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,05t}$ tend vers zéro. Dans $f(t) = 13e^{-0,05t} + 25$, le terme exponentiel disparaît à la limite et il reste le terme constant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 25.$

Question 3. b). Interpréter dans le contexte de l'exercice la valeur de la limite de f en +∞.

La limite trouvée est 25 °C. Dans le contexte, cela signifie que la température de l'eau se rapproche progressivement de 25 °C lorsque le temps écoulé devient très grand. Cette valeur est précisément la température ambiante extérieure, supposée constante dans l'énoncé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À long terme, l'eau se rapproche de la température ambiante : **25 °C**.

Question 4. a). L'alarme sonne lorsque la température devient strictement inférieure à la température programmée. Pour un réglage à 36 °C, déterminer par le calcul le temps écoulé depuis la coupure avant que l'alarme sonne. Donner la durée exacte, puis sa valeur arrondie à la minute.

Le seuil est atteint lorsque $f(t) = 36$: $13e^{-0{,}05t} + 25 = 36$, donc $e^{-0{,}05t} = 11/13$ et $t = 20\ln(13/11)$ heures. Cela vaut environ 200,465 minutes, soit 200 minutes à la minute près. L'alarme sonne juste après le passage sous le seuil.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Seuil atteint après $20\ln(13/11)$ h, soit **3 h 20 min** à la minute près.

Question 4. b). Déterminer la valeur numérique affichée par l'algorithme fourni, qui augmente H d'une heure et actualise T selon T = 13e^(-0,05H) + 25 tant que T ≥ 34.

À chaque passage dans la boucle, H augmente d'une heure puis T est recalculée. Pour $H = 7$, $T = 13e^{-0{,}05\times 7} + 25 \approx 34,161$, donc la boucle continue. Pour $H = 8$, $T \approx 33,714 < 34$: elle s'arrête et affiche alors $H = 8$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La valeur affichée est **8**.

Question 4. c). Expliquer ce que l'algorithme permet de déterminer dans le contexte de l'exercice.

L'algorithme part de la température initiale de 38 °C, puis augmente le temps écoulé d'une heure et recalcule la température. Il poursuit tant que celle-ci est supérieure ou égale à 34 °C. Il repère ainsi le premier nombre entier d'heures auquel la température passe sous 34 °C.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L’algorithme détermine qu’il faut **8 heures** pour passer sous 34 °C.

2. Contrôle qualité et commercialisation de farine par une minoterie

Une minoterie contrôle l'extensibilité de pâtes et le taux d'humidité de livraisons de blé avant leur transformation en farine. L'exercice porte aussi sur la masse des sacs de farine et sur les probabilités liées aux clients qui testent la farine La Romaine.

Partie A

Question 1. a). À partir des cinq indices d'extensibilité mesurés, 104, 81, 83, 57 et 55 mm, donner la moyenne de la série et son écart-type arrondi au centième.

La moyenne est $\bar{x} = \frac{104+81+83+57+55}{5} = 76$ mm. La moyenne des carrés des écarts à cette moyenne vaut $\frac{28\times28+5\times5+7\times7+19\times19+21\times21}{5} = 332$. L'écart-type est donc $\sqrt{332} \approx 18,22$ mm.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Moyenne : 76 mm ; écart-type : 18,22 mm.

Question 1. b). En prenant l'écart-type égal à 18 mm, vérifier qu'aucune des cinq valeurs n'est en dehors de l'intervalle [x̄ − 2σ ; x̄ + 2σ], puis conclure si le technicien doit tester cinq nouveaux échantillons de pâte.

Vérification	Résultat
$76 - 2 \times 18$	40 mm
$76 + 2 \times 18$	112 mm
Mesures observées	55, 57, 81, 83 et 104 mm

Toutes les mesures appartiennent à $[40\,;\,112]$ mm. Le technicien n'a donc pas à tester cinq nouveaux échantillons.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Aucune mesure hors intervalle : aucun nouveau test.

Question 2. À partir des masses et des taux d'humidité des deux camions, montrer que le taux d'humidité du blé mélangé dans le silo sera inférieur à 13 % et que le technicien peut autoriser le déchargement.

Le taux d'humidité du mélange est pondéré par les masses : $\frac{29540\times12,4+14540\times14,1}{29540+14540} \approx 12,961$ %. Ce taux est inférieur à la limite de 13 % imposée par le cahier des charges : le déchargement dans le même silo peut être autorisé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Taux du mélange : 12,961 % ; déchargement autorisé.

Partie B

Question 1. La masse X d'un sac de farine suit une loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1 kg. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'un sac choisi au hasard ait une masse inférieure à 25 kg.

On centre et réduit le seuil de 25 kg : $z = \frac{25-25{,}2}{0{,}1} = -2$. Ainsi, $P(X < 25) = P(Z < -2) \approx 0{,}0228$, où Z suit la loi normale centrée réduite. À 10^{-3} près, la probabilité vaut 0,023.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X < 25) \approx 0{,}023$.

Question 2. a). Déterminer un réel h tel que P(25,2 − h ≤ X ≤ 25,2 + h) soit approximativement égal à 0,95, à 10^{-2} près.

1. Pour une loi normale, l'intervalle central contenant environ 95 % des valeurs s'étend à environ 1,96 écart-type de la moyenne.
2. Donc $h \approx 1{,}96 \times 0{,}1 = 0{,}196$ kg, soit $0{,}20$ kg au centième près.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h \approx 0{,}20$ kg.

Question 2. b). À partir du graphique fourni, expliquer pourquoi la courbe représentée ne peut pas être celle de la fonction de densité de la variable aléatoire X.

La variable a un écart-type de seulement 0,1 kg : sa densité doit donc être très concentrée autour de 25,2 kg. En particulier, environ 99,7 % des masses sont comprises entre 24,9 et 25,5 kg.

- La courbe représentée s'étale sur une plage de masses beaucoup plus large.
- Sa dispersion est donc incompatible avec celle de la loi normale de X.

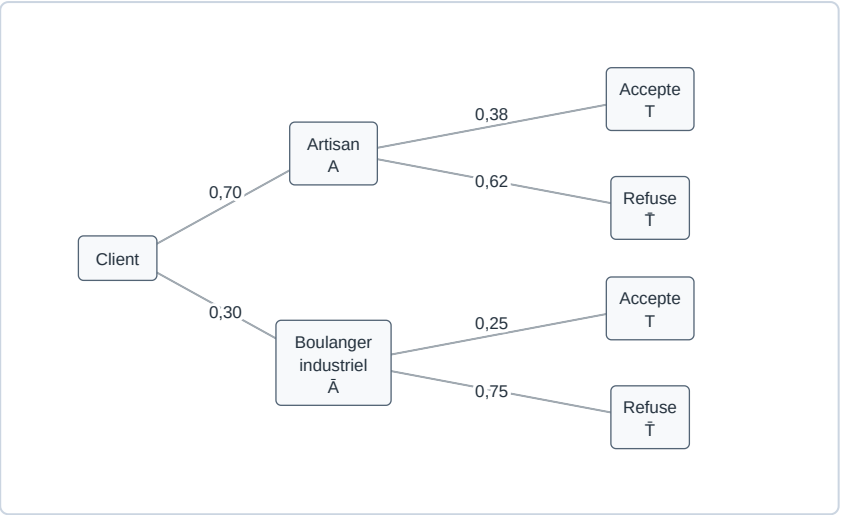
> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe est beaucoup trop étalée pour un écart-type de 0,1 kg.

Partie C

Question 1. Représenter la situation par un arbre pondéré, avec 70 % d'artisans boulangers, 38 % d'acceptation de l'essai parmi les artisans et 25 % parmi les boulangers industriels.

On note A l'événement « artisan boulanger » et T l'événement « accepte de tester ». Les probabilités de refus sont les complémentaires de celles d'acceptation.

Arbre pondéré des clients et de l'acceptation de l'essai



Probabilités inscrites sur les branches.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Branches : 0,70 et 0,30 ; puis 0,38 et 0,62 pour les artisans, 0,25 et 0,75 pour les industriels.

Question 2. a). Calculer la probabilité que le client choisi soit un artisan boulanger et accepte de tester la farine La Romaine.

Le chemin « artisan boulanger puis accepte » donne la probabilité recherchée : $P(A \cap T) = P(A) \times P_A(T) = 0,70 \times 0,38 = 0,266$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A \cap T) = 0,266$.

Question 2. b). Montrer que la probabilité qu'un client accepte de tester la farine La Romaine est égale à 0,341.

1. Artisan et accepte : $0,70 \times 0,38 = 0,266$.
2. Industriel et accepte : $0,30 \times 0,25 = 0,075$.
3. Les deux cas étant incompatibles, $P(T) = 0,266 + 0,075 = 0,341$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T) = 0,341$.

Question 3. **Sachant qu'un client a testé la farine La Romaine, calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il soit un artisan boulanger.**

Par la formule de probabilité conditionnelle, $P_T(A) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}266}{0{,}341} \approx 0,780$ à 10^{-3} près.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(A) \approx 0,780$.

Question 4. a). **Pour 200 clients, le nombre Y de clients ayant testé La Romaine suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,341. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au plus 60 clients aient testé la farine.**

« Au plus 60 » signifie $Y \leq 60$. Pour la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,341$, la probabilité cumulée jusqu'à 60 vaut environ 0,125 à 10^{-3} près.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 60) \approx 0,125$.

Question 4. b). **Calculer l'espérance de Y et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.**

L'espérance d'une loi binomiale est $E(Y) = np$. Donc $E(Y) = 200 \times 0,341 = 68,2$. Sur des échantillons de 200 clients, on s'attend en moyenne à environ 68 clients ayant testé la farine.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(Y) = 68,2$ clients sur 200.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRD1. Les pages fournies ne précisent ni la durée ni le coefficient. Deux exercices portent sur le refroidissement d'un spa et les activités d'une minoterie. Les compétences évaluées comprennent équations différentielles, étude de fonctions, algorithmique, statistiques, lois normale et binomiale, et probabilités.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une équation différentielle linéaire, la solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
- La température du spa est modélisée par f(t) = 13e^(-0,05t) + 25 et tend vers la température ambiante de 25 °C.
- Un taux d'humidité de mélange se calcule en pondérant les taux par les masses correspondantes.
- Pour une variable binomiale Y de paramètres n et p, l'espérance est E(Y) = np.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter le signe négatif de l'exposant du modèle du spa et associer t à une durée en heures.
- Dans le contrôle qualité, calculer les bornes de l'intervalle avant de comparer les cinq mesures.
- Pour l'humidité du silo, tenir compte de la masse de chaque camion et non calculer la moyenne simple des taux.
- Pour une probabilité conditionnelle, identifier l'événement qui conditionne avant de former le quotient.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle de refroidissement ?

Résolvez d'abord l'équation homogène y' + 0,05y = 0, puis cherchez une solution particulière constante pour le second membre 1,25. La condition initiale f(0) = 38 détermine la constante de la solution.

Q : Comment calculer le taux d'humidité du mélange des deux livraisons ?

Pour chaque camion, multipliez la masse de blé par son taux d'humidité afin d'obtenir la masse d'eau apportée. Additionnez ces masses d'eau, divisez par la masse totale de blé, puis comparez le résultat à 13 %.

Q : Comment organiser les calculs de probabilités sur la farine La Romaine ?

Construisez l'arbre avec les proportions des deux catégories de clients et leurs taux d'acceptation. Utilisez les probabilités totales pour calculer l'acceptation, puis la probabilité conditionnelle pour trouver la catégorie d'un client ayant testé la farine.

Q : Quels éléments faut-il présenter pour la loi binomiale de l'échantillon ?

Utilisez les paramètres indiqués, n = 200 et p = 0,341. La probabilité demandée est P(Y ≤ 60), à arrondir à 10^{-3}. Pour interpréter l'espérance, calculez np et exprimez-la comme un nombre moyen de clients.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtsassurance.fr/assets/annales/bts-assurance/E2 - Mathématiques/2023/BTS Assurance - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Assurance : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.